

Üç Temel Kesir Dereceli Türev Tanımına Göre Matlab Ortamında Kesir Dereceli Türev Hesaplamaları

¹Mahdi HatamiVarjovi,¹Furkan Öztemiz,²Kenan Donuk,¹Buket Toptaş,¹Hüseyin Fırat,
³Mücahit Karadumanve⁴Mevlüt İnan

*¹İnönü Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Malatya, Türkiye (mahdi.hatami.v@gmail.com,
furkanoztemiz@gmail.com, buketecrinozturk@gmail.com, huseyinfirat21@hotmail.com)

²Şırnak Üniversitesi, Cizre Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Programcılığı, Şırnak,
Türkiye(kenandonuk@sirnak.edu.tr)

³ Malatya Turgut Özal Üniversitesi, Arapgir Meslek Yüksekokulu, Malatya, Türkiye
(mucahit.karaduman@ozal.edu.tr)

⁴Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Başkale Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Programcılığı, Van,
Türkiye(mevlutinan@yyu.edu.tr)

Received:10 Aralık 2018

Accepted: Jan.8, 2019

Published: Jun. 1, 2019

Özetçe— Bu çalışmada literatürde kabul görmüş üç farklı kesir derece türev tanımı olan Caputo tanımı, Grunwald-Letnikovtanımı ve Laplace kuvvet fonksiyonu türev genellemesine göre Matlab ortamında kesir dereceli türev hesaplamaları yapılmıştır. Hesaplama sonuçları ve çalışmada kullanılan Matlab kodları paylaşılmıştır. Hesaplamalar temel matematiksel fonksiyonlar olan $f(t) = e^t$, $f(t) = \sin(t)$ ve polinomlar için gerçekleştirilmiştir. Yöntemlerin performansı sonuçların birinci derece türev sonuçları ile karşılaştırılması ile gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler:Kesir dereceli türev,Caputo tanımı, Grunwald-Letnikov tanımı, Laplace kuvvet fonksiyonu türev genellemesi

1.Giriş

Günümüzde, kesir dereceli sistem çalışmaları önemi giderek artmış ve bu sistemlerin tasarımı ve gerçekleştirilmesi konusunda çalışmalar yapılmıştır [1-7]. Kesir dereceli sistem analizi için kesir dereceli türev operatörünün hesaplanması gerekmektedir [7].

Bu çalışmada, yaygın olarak kabul görmüş olan kesir derece türev tanımlarından Caputo tanımı, Grunwald-Letnikov (GL) tanımı ve Laplace kuvvet fonksiyonu türev genellemesine göre bazı temel fonksiyonlar için kesir dereceli türev hesaplamaları Matlab ortamında gerçekleştirilmiştir. Her yöntem için yöntemin tarihçesi ve kısa bir literatür özeti ilgili bölüm başlığı altında kısaca sunulmaktadır. Kullanılan Matlab kodlarının önemli kısımları da ilgili bölüm başlığı altında verilmiştir. Yöntemlerin performansları, birinci derece türev sonuçlarına göre değerlendirilmiştir. Birinci derece türevine göre göreceli mutlak hataları ($|f'(t) - D^{1.0} f(t)| / f'(t)$) ve ortalama mutlak hata değerleri

$(\frac{1}{t_u} \sum_{t=0}^{t_u} |f'(t) - D^{1.0} f(t)|)$ karşılaştırılmıştır.

2. Yöntemler ve Performans Sonuçları

2.1. Caputo Yöntemi

Kesir dereceli türev hakkında birçok tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan biride İtalyan matematikçi M.vCaputo'ya ait olan Caputo tanımıdır. Caputo, 1960 yılında önerilen bir kesir dereceli türev hesaplama yöntemidir. Bu yöntem, Riemann-Liouville ve Laplace dönüşümünde yaşanan problemleri ortadan kaldırmak için öne sürülmüştür[1].Caputo yöntemi ile bahsi geçen yöntemlerin başlangıç değerlerinin hesaplanmasında deneysel ölçüme bağlı olma problemi ortadan kalkmıştır. Caputo yöntemine göre, kesirli diferansiyel denklemler ile tamsayı dereceli türevsel denklemler için tanımlanan başlangıç şartının aynı olması gerekir.

Denklem 1'de Caputo kesirli türev ifadesinin tanımlanması verilmiştir [2].

$${}_a D_x^{\alpha,p} := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau & n-1 < \alpha < n \text{ için } n \in \mathbf{N} \\ \frac{d^n}{dx^n} f(x) & \text{ için } \alpha = n \in \mathbf{N} \end{cases} \quad (1)$$

Burada, $f(x) \in R$ ve $\alpha \in R$ şartını sağlamaktadır.

2.1.1. Caputo Tanımına Göre Kesir Dereceli Türev Hesaplaması

Literatürde Caputo yöntemi üzerinde pek çok çalışma bulunmaktadır[3-6]. Bu çalışmada,SeanTownsend[2] tarafından hazırlanan tez çalışmasında $0 < \alpha < 1$ için denklem 2'de verilen matematiksel ifadeye göre Caputo yöntemi bazı matematiksel fonksiyonlar üzerine uygulanmıştır. Uygulama işlemi için Matlab ortamı kullanılmış olup, Caputo yönteminin fonksiyonlar üzerinde uygulanması için Tablo 1'de verilen kod parçası kullanılmıştır.

$${}_a^c D_x^\alpha f(x) = \frac{f(a)(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{1-\alpha} f^{(2)}(\tau) d\tau \quad (2)$$

Tablo 1. Caputo Yöntemi

```
function[sonuc]=caputoFonk(fonks2,fonks1,alfa,t,n,a)
% n parametresi alfa=1 örneği için 2'dir. n-1<alfa<n kabulünden dolayı
% t parametresi 0:0.01:20aralığındaki her değer
I_fonk=@(x)(t-x).^(-(alfa-n+1)).*(fonks2(x));
payda= gamma(n-alfa);
integral_islemi=integral(I_fonk,a,t);
ifade1= fonks1(a).*(t-a).^(-(alfa-n+1))./payda;
ifade2 =integral_islemi/payda;
asn=ifade1+ifade2;
end
% ----- main kısmı -----
main()%caputo fonksiyonunuçalıştırmak için gerekli parametreler.
t=0.0:0.01:20; alfa=1; n=2; a=0.1; % a = sabit olup 0.1 olarak kabul edilmiştir.
symsfonk(x);
fonk(x)=exp(x);
df1=diff(fonk,1,'x');% 1. dereceden türev
fonk1 = matlabFunction(df1);
df2=diff(fonk,2,'x');% 2. dereceden türev
fonk2 = matlabFunction(df2);
sonuc = caputoFonk(fonk2,fonk1,alfa,t,n,a);
```

Matlab ortamında koşturulan caputoFonk.m dosyası altı parametre almaktadır. Birinci parametre Caputo yönteminin uygulanacağı matematiksel fonksiyonların ikinci türevini temsil eden *fonks2* parametresidir. Denklem 2’de integralin iç kısmındaki fonksiyona karşılık gelmektedir. İkinci parametre matematiksel fonksiyonların *fonks1* parametresidir. Denklem 2’de ilk fonksiyon ifadesini temsil etmektedir. Üçüncü parametre, kesir dereceyi temsil eden *alfa* parametresidir. Dördüncü parametre, zaman aralığı yani integralin üst sınırını ifade eden *t* parametresidir. Beşinci parametre ise türevin derecesini ifade eden *n* parametresidir. Son parametre ise, *a* parametresi olup, integralin başlangıç noktasını vermektedir.

Denklem 2’de verilen matematiksel ifadesinin Matlab ortamında Tablo 1’de sunulan kod hali için $D^{0.5}, D^{0.8}, D^1$ türevleri sırası ile $f(t)$ fonksiyonlarına uygulanmıştır. $D^{1.2}$ ve $D^{1.5}$ kesir dereceleri için ise SeanTownsend[2] tarafından hazırlanan çalışmada $1 < \alpha < 2$ aralığı için kullanılan ve denklem 3’de verilen matematiksel ifade $f(t)$ fonksiyonları üzerine uygulanmıştır. $f(t)$ fonksiyonları sırası ile şöyledir: $f(t) = e^{at}$, $f(t) = \sin(at)$, $f(t) = at$, $f(t) = at^2 + bt + c$. Tablo (2)’de $t=5$ değeri için beş farklı kesir derecesinin dört farklı fonksiyon üzerindeki sonucu sayısal verilerle sunulmuştur.

$${}^c D_x^\alpha f(x) = \frac{f^{(2)}(a)(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{1-\alpha} f^{(3)}(\tau) d\tau \quad (3)$$

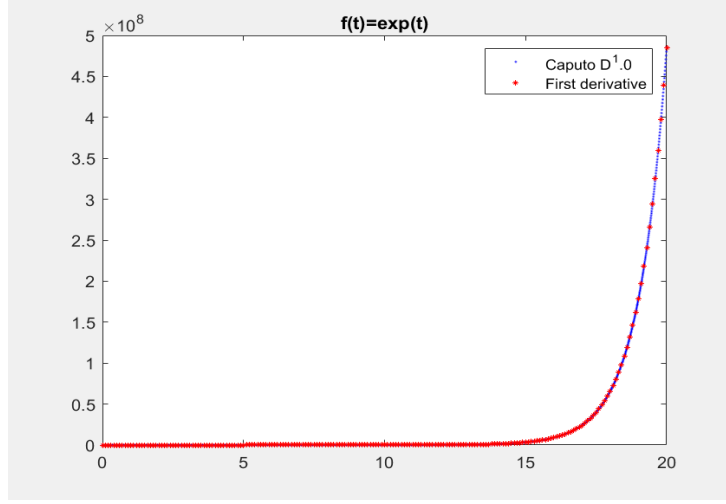
Tablo2. $t=5$ için farklı kesir derecelerinde $f(t)$ fonksiyon değerleri

t=5 için		Fonksiyonlar			
		$f(t) = e^t$	$f(t) = \sin(t)$	$f(t) = at$	$f(t) = at^2 + bt + c$
Kesir Derecesi	$D^{0.5}$	1.48154	-0.52542	2.49777	19.31611
	$D^{0.8}$	1.48159	0.04093	1.49663	14.01850
	$D^{1.0}$	1.45694	0.283662	1	10.99999
	$D^{1.2}$	1.46320	0.84721	0.99999	1.25012
	$D^{1.5}$	1.47203	0.50000	0.99999	0.50977

Tablo 2’de $f(t)$ fonksiyonları ($f(t) = e^{at}$, $f(t) = \sin(at)$, $f(t) = at$, $f(t) = at^2 + bt + c$) için $D^{0.5}, D^{0.8}, D^1, D^{1.2}$ ve $D^{1.5}$ kesir derecelerinin Caputo tanımına göre sonuçları verilmiştir. Caputo tanımına göre, $D^{0.5}$ ve $D^{0.8}$ kesir derecesi için *n* parametresi 1 değerini almıştır. $D^1, D^{1.2}$ ve $D^{1.5}$ kesir derecesi için ise *n* parametresi 2 değerini almıştır. Tablo 2 için *a*, *b* ve *c* parametreleri 1 kabul edilmiştir.

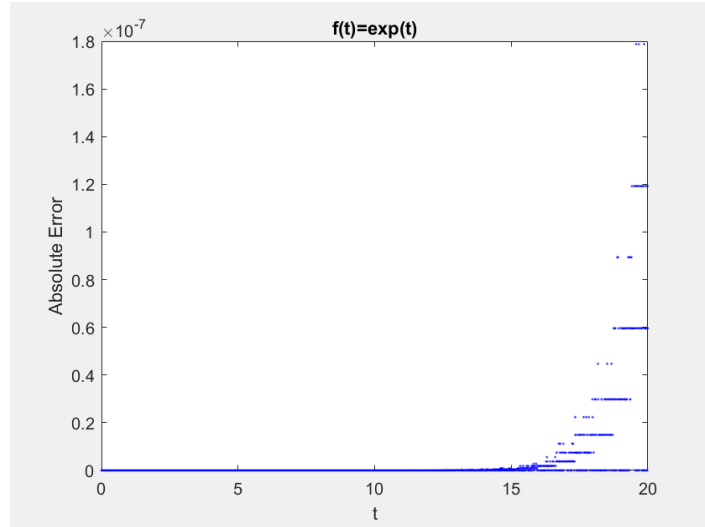
Bu çalışmada, $f(t)$ fonksiyonları üzerinde uygulanan Caputo yöntemi için α parametresinin 1 değeri ve 0-20 aralığında 0.01 artışlara sahip *t* parametre değerinin uygulama sonuçları görsel olarak sunulmuştur. Caputo tanımına göre, $n-1 < \alpha < n$ koşulundan dolayı α parametresinin 1 değeri için *n* parametresi 2 değerini alır. Başka bir deyişle *n* parametresinin 2 olması fonksiyonun ikinci türevini ifade etmektedir.

Denklem 3 kullanılarak elde edilen Caputo sonuçları ile $f(t) = e^{at}$ fonksiyonun $f'(t)$ sonucu ile karşılaştırılması Şekil 1’de, mutlak hata fonksiyon sonucu ise Şekil 2’de görsel olarak sunulmuştur. $f(t)$ fonksiyonu için *a* parametresi 1 olarak kabul edilmiştir.



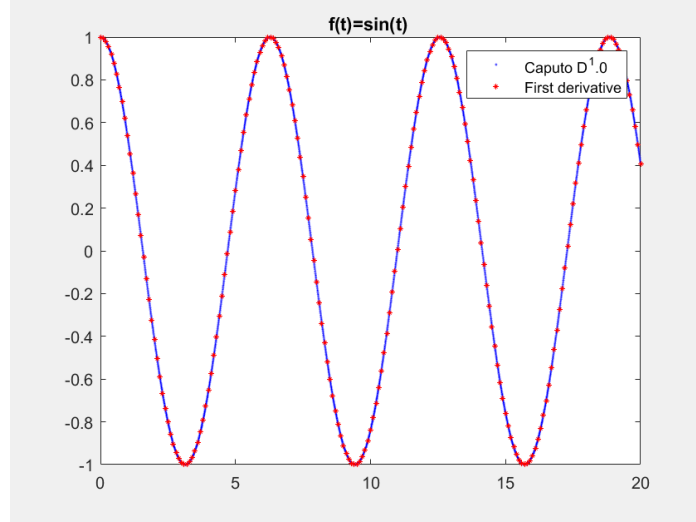
Şekil 1. $f(t) = e^t$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ için Caputo türev sonucu ile $f'(t) = e^t$ fonksiyonunun karşılaştırılması

Şekil.1' de görsel olarak sunulan, $f(t) = e^t$ için $f'(t) = e^t$ türev ve Caputo tanımına göre $D^{1.0}f(t)$ sonucu incelendiğinde her iki sonucunda örtüştüğü gözlemlenmiştir. Bu görsel sonuca dayanarak, Caputo yönteminin $f(t) = e^t$ fonksiyonu üzerinde uygulama sonucunun başarılı olduğu söylenebilir.Şekil 2'de mutlak hata dağılımı doğruluğun yüksek olduğunu göstermiştir.



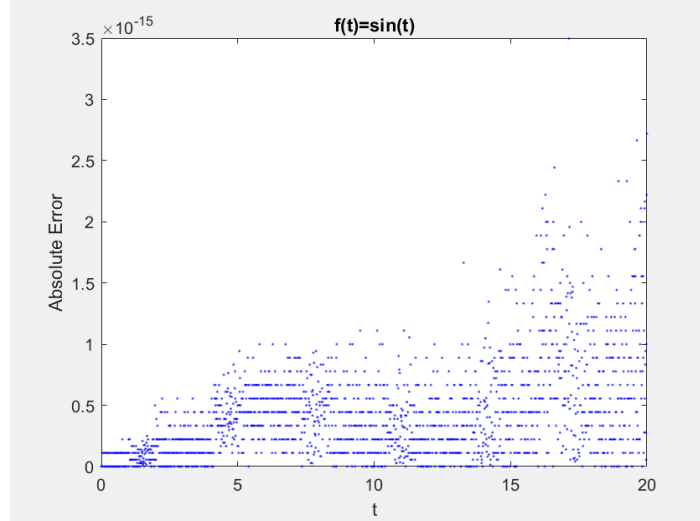
Şekil2. $f(t) = e^t$ fonksiyonu için $D^{1.0}f(t)$ için Caputo türev sonucu ile $f'(t) = e^t$ arasında mutlak hata

Denklem 3 ile elde edilen Caputo sonuçları ile $f(t) = \sin(at)$ fonksiyonun $f'(t)$ sonucu ile karşılaştırılması Şekil 3'de, mutlak hata fonksiyon sonucu ise Şekil 4'de görsel olarak sunulmuştur. $f(t)$ fonksiyonu için a parametresi 1 olarak kabul edilmiştir.



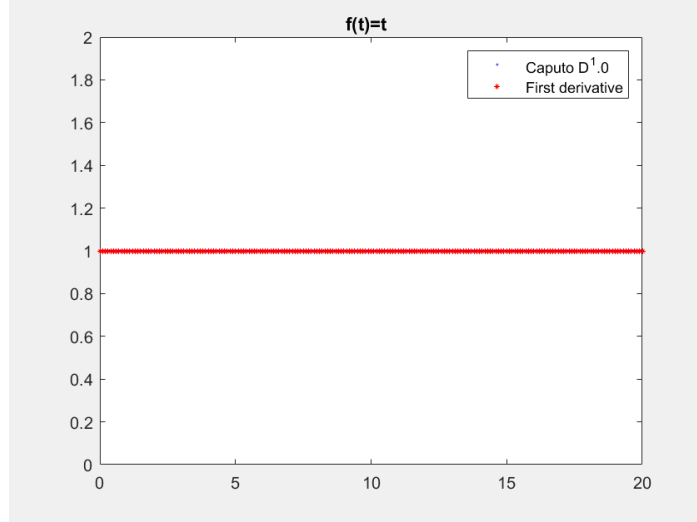
Şekil 3. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ Caputo türevi sonucu ile $f'(t) = \cos(t)$ fonksiyonunun karşılaştırılması

Şekil 3’de görsel olarak sunulan, $f(t) = \sin(t)$ ile $f'(t) = \cos(t)$ türev sonucu incelendiğinde Caputo grafiğinin sıfır noktasındaki değeri, türevin sıfır noktasındaki değerinden 0.5 daha küçüktür. Zaten $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonunun türevi $f'(t) = \cos(t)$ fonksiyonu olduğu için bu fonksiyonlar sıfır noktasında aynı değeri vermemektedirler. Bu görsel sonuca dayanarak, Caputo yönteminin $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonu üzerinde uygulama sonucunun başarılı olduğu söylenebilir. Şekil 4’de mutlak hatanın dağılımının çok küçük olduğunu görülmüştür.



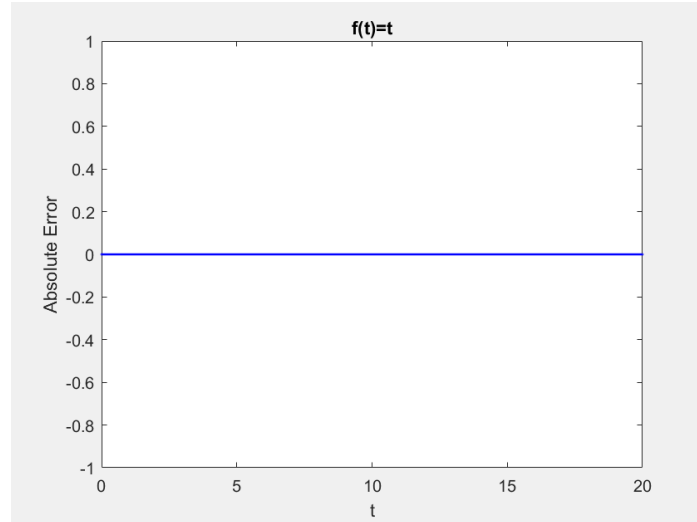
Şekil4. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonu için $D^{1.0}f(t)$ için Caputo türev sonucu ile $f'(t) = \cos(t)$ arasında mutlak hata

Denklem 3 ile elde edilen Caputo sonuçları ile $f(t) = at$ fonksiyonun $f'(t)$ sonucu ile karşılaştırılması Şekil 5’de, mutlak hata fonksiyon sonucu ise Şekil 6’da görsel olarak sunulmuştur. $f(t)$ fonksiyonu için a parametresi 1 olarak kabul edilmiştir.



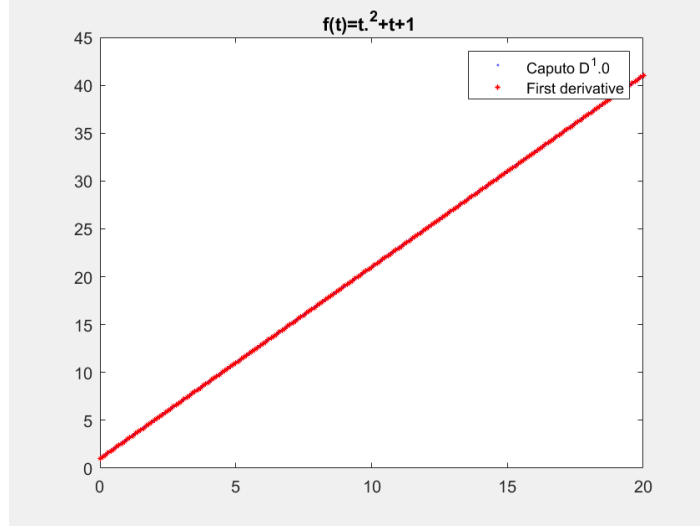
Şekil5. $f(t) = t$ fonksiyonun $D^{1.0} f(t)$ Caputo türev sonucu ile $f'(t) = 1$ fonksiyonunun karşılaştırılması

Şekil 5’de görsel olarak sunulan, $f(t) = at$ ile $f'(t) = 1$ türev sonucu incelendiğinde her iki sonucunda örtüştüğü gözlemlenmiştir. Bu görsel sonuca dayanarak, Caputo tanımının $f(t) = at$ kuvvet fonksiyonu için tutarlı sonuç verdiği görülmüştür. Mutlak hatası sıfır düzeyindedir.



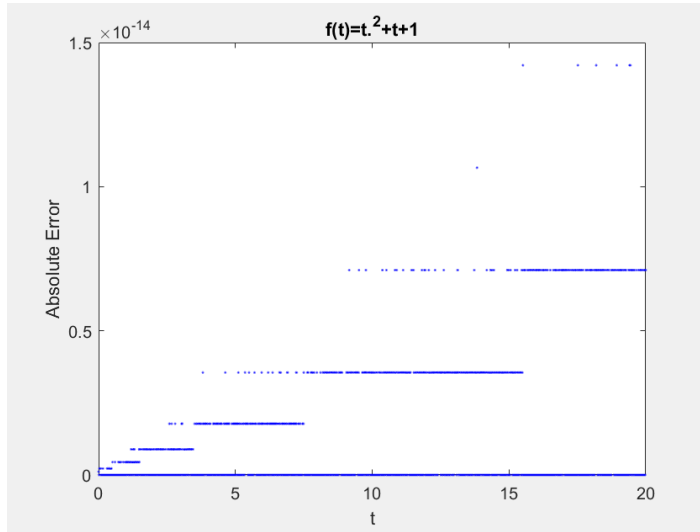
Şekil6. $f(t) = t$ fonksiyonu için $D^{1.0} f(t)$ için Caputo türev sonucu ile $f'(t) = 1$ arasında mutlak hata

Denklem 3 ile elde edilen Caputo sonuçları ile $f(t) = at^2 + bt + c$ fonksiyonun $f'(t)$ sonucu ile karşılaştırılması Şekil 7’de, mutlak hata fonksiyon sonucu ise Şekil 8’de görsel olarak sunulmuştur. $f(t)$ fonksiyonu için a, b ve c parametresi 1 kabul edilmiştir.



Şekil 7. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $D^{1.0} f(t)$ Caputo türevi sonucu ile $f'(t) = 2t + 1$ fonksiyonunun karşılaştırılması

Şekil 7’de görsel olarak sunulan, $f(t) = at^2 + bt + c$ ile $f'(t) = 2t + 1$ türev sonucu incelendiğinde her iki sonucunda üst üste geldiği gözlemlenmiştir. Bu görsel sonuca dayanarak, Caputo yönteminin $f(t) = at^2 + bt + c$ fonksiyonu üzerinde uygulama sonucunun başarılı olduğu söylenebilir. Şekil 8’de görülen mutlak hata değerleri bu sonucu desteklemiştir.



Şekil8. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonu için $D^{1.0} f(t)$ için Caputo türev sonucu ile $f'(t) = 2t + 1$ arasında mutlak hata

2.2. Grünwald-Letnikov Yöntemi ile Temel Fonksiyonların Kesir Dereceli Türevleri

GL yöntemi 1867’de Prag’dan Anton Karl Grünwald (1838–1920) ve 1868’de Moskova’da Aleksey Vasilievich Letnikov (1837–1888) tarafından tanıtılmıştır. Kesir dereceli diferansiyel klasik tamsayı dereceli diferansiyel tanımının sürekli fonksiyonlar için genelleştirilmiş hali olmaktadır [7]. Kesir dereceli türev ve integral hesaplamalarının matematiksel tanımlamalarına ait çeşitli yaklaşımlar bulunmaktadır [8-9]. Bu tanımlardan biri olan GL tanımı denklem 4 ve 5’de verilmektedir.

$$D_t^\alpha y(t) = \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s^\alpha} \sum_{j=0}^p w_j^{(\alpha)} y(t - jT_s) \quad (4)$$

$$p \leq \frac{1}{T_s} < p + 1 \text{ ve } w_0^\alpha = 1, w_j^\alpha = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)} \quad (5)$$

2.2.1 Literatür Araştırması

Tarasov çalışmasında yerel olmayan sürekliliğin kesirli gradyan elastikiyeti için GL tipinin uzun menzilli etkileşimleri ile üç boyutlu kafeslerin modelleri önerilmiştir. Önerilen kafes modelleri, yerellik dışı güç-tipi malzemelerin esnekliği için yeni bir mikro yapısal temel sağlamaktadır. Bu çalışma ile önerilen bu kafes modelleri, kesirli ve kesirli olmayan gradyan elastikiyeti devamlılığı için birleşik bir mikroskobik açıklamaya sahip olmamızı sağladığı görülmektedir [10]. Tolba ve diğ., GL ve Caputo tanımları kullanarak FPGA üzerinde bir donanım uygulaması önermişlerdir. Gerçekleşme, değişken bir arama tablosuyla tekdüze olmayan bölütleme algoritmasına dayanmaktadır. GL için genel bir uygulama önerilirken ve Caputo uygulaması için 32 bit'lik bir radix-4 kullanılmıştır. Caputo uygulaması için toplam 2515 arama tablosu elde edilmiş ve GL mimarisi için maksimum 54,11 Mhz frekansı ve 1498 dilim elde edildiği görülmüş ve bu sonuçların literatürdeki diğer çalışmalara göre daha iyi sonuç verdiği tespit edilmiştir [11]. Obembe ve diğ., GL kesirli hesap modeli kullanılarak düzensiz ve kırık ortamlarda difüzyon analizi yapmışlardır. Çalışmada sentetik bir rezervuar için anormal difüzyon etkisi altında sıvı akışını simüle etmek için örtülü bir blok merkezli sonlu fark sayısal şeması başarıyla geliştirilmiştir. Çözüm yöntemi zaman kısmi türev operatörünün GL yorumlamasını içermektedir. Yaptıkları stabilite analizi ile geliştirilen sayısal şemanın herhangi bir makul zaman adımı büyüklüğü için koşulsuz olarak kararlı olduğunu ortaya koymuşlardır [12]. Wang ve diğ., çift taraflı GL differintegrator baz alınarak kesirli 90 dereceli faz-değişim filtreleme tekniğini araştırmışlardır. Çift taraflı differintegrator elde etmek için önce sağ taraflı GL ve bu esas alınarak gürültü gideren 90 dereceli faz-değişim filtresi elde etmişlerdir. Bu önerilen filtrenin uygulaması için çift taraflı bir konvolüsyon maskesi inşa etmişler ve iyi bir gürültü gidermeye sahip bir filtre elde ettiklerini öne sürmüşlerdir [13]. Harker ve O'Leary çalışmalarında GL operatöründen eğri kuralı türetmişlerdir. Formül parçalı doğrusal bir fonksiyonun GL türev / integralini kesin vermesi anlamında bir eğri kuralıdır. Öncelikle eşit aralıklı noktalar için formül elde edilmiş ve daha sonra keyfi apsis değerlerin için eşdeğer üretmek için kullanılmıştır. Türetilen eğri kuralının sayısal testler onucunda belirli bir nokta toleransı için kesirli integral ve türevleri hesaplamak için kullanılmasının yanı sıra keyfi fonksiyonlarda da iyi sonuçlar verdiğini göstermişlerdir [14]. Jalalinejad ve diğ., çalışmalarında görüntü işlemedeki kenar bulma ve görüntü iyileştirme noktasında GL türevinin kullanılabileceği üzerine bir öneride sunmuşlardır. Yaptıkları esnek GL yöntemi önerisi ile görüntüdeki iyileştirme, kenar tespitinin ve tıbbi teşhis noktalarında verimli sonuçlar verdiğini belirtmişlerdir [15]. John ve Kunju görüntü iyileştirmede kullanılan GL tabanlı fonksiyonun optimize edilmesi üzerine bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Başlangıç olarak kesirli dereceli filtrenin karşılaştırmalı bir çalışması ve Sobel filtresi gibi bir tamsayı düzenine sahip çekirdek filtreler, manyetik rezonans görüntüleme görüntülerinde filtre hareketi gerçekleştirilerek yapılır. Rasgele Gauss gürültüsü ekleyerek filtrelerin performansı analiz edilmiş ve daha sonra fonksiyonun optimize edilmiş parametrelerinin hesaplamışlardır [16].

2.2.2 Grünwald-Letnikov Yönteminin Hesaplanması için Fonksiyonlar

GL yöntemi ile kesirli dereceli türevlerin hesabını yapan GL_Hesaplama, w ağırlık değerini hesaplayan W_Hesapla ve farklı fonksiyonlar için hesaplama yapılmasından dolayı fonksiyon türünü belirleyen fonksiyon adı bir fonksiyon Matlab'da kodlanmıştır. GL_Hesaplama fonksiyonuna Tablo 3'de yer verilmiştir. Özyinelemeli bir yapı ile oluşturulan W_Hesapla fonksiyonuna parametreler gönderilmekte ve hesaplama yapılmaktadır. Bu hesaplama için fonksiyon kodları Tablo 4 de verilmektedir. Uygulama $f(t) = e^t$, $f(t) = \sin(t)$, $f(t) = t$ ve $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonları için yapılmıştır. Bu fonksiyon seçimin yapılmasına ait kodlar Tablo 3, Tablo 4 ve Tablo 5 de verilmiştir. Hesaplama için kullanılan kesirli dereceli türevler $D^{0,5}$, $D^{0,8}$, $D^{1,0}$, $D^{1,2}$ ve $D^{1,5}$ dir.

Tablo 3. GL yöntemi ile türev hesaplama.

```
function sonuc=GL_Hesaplama(ts, t, a)
%Fonksiyon.m dosyasındaki seçilen fonk türü
%1 => y(t)=t
%2 => y(t)=sin(t)
%3 => y(t)=exp(t);
fonk_tur=1;
%p?(t/ts)<p+1
p=floor(t/ts);
%Sonucu başlangıçta 0 alıyoruz.
sonuc=0;
%Seri açılımı burdan hesaplanıyor
for j =0:p
%Fonksiyon(tur,deger) , W recursif yapıyla değer hesabı
sonuc=sonuc+(Fonksiyon(fonk_tur, t-j*ts)*W_Hesapla(j, a));
end
%Elde edilen sonucun (1/(ts^a) ile çarpılması
sonuc=sonuc*(1/(ts^a));
end
```

Tablo 4. GL yöntemindeki w ağırlık değerinin hesaplanması.

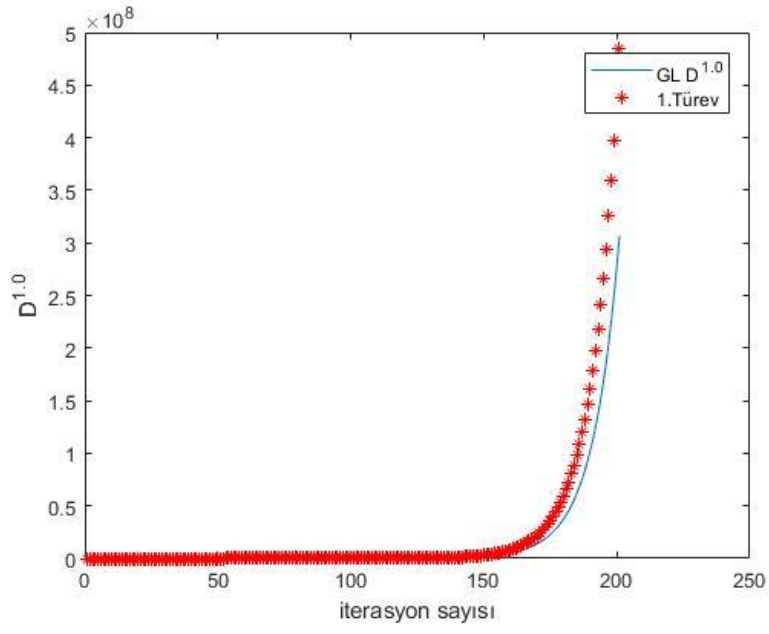
```
function w =W_Hesapla(j,a)
if j<=0
w=1;
else
w=(1-((a+1)/j))*W_Hesapla(j-1, a);
end
```

Tablo 5. GL yöntemindeki fonksiyon kodu.

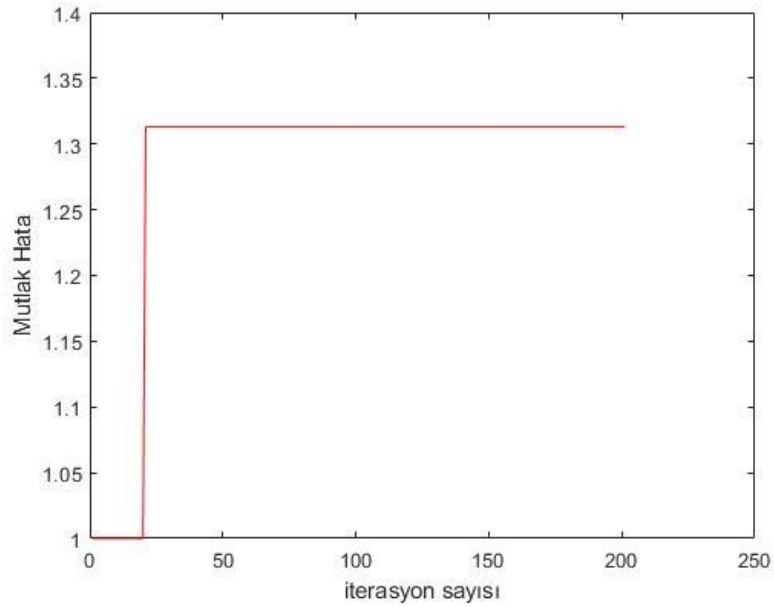
```
function F = Fonksiyon(tip,deger)
if tip ==1
F =deger;
elseif tip ==2
F = sin(deger);
elseif tip ==3
F =exp(deger);
end
end
```

2.2.3 Grünwald-Letnikov Yönteminin Uygulanması ve Elde Edilen Sonuçlar

GL yöntemi kullanılarak $f(t) = e^{at}$ fonksiyonun $f'(t)$ sonucu ile karşılaştırılması Şekil 9'da, mutlak hata fonksiyon sonucu ise Şekil 10'da görsel olarak sunulmuştur.

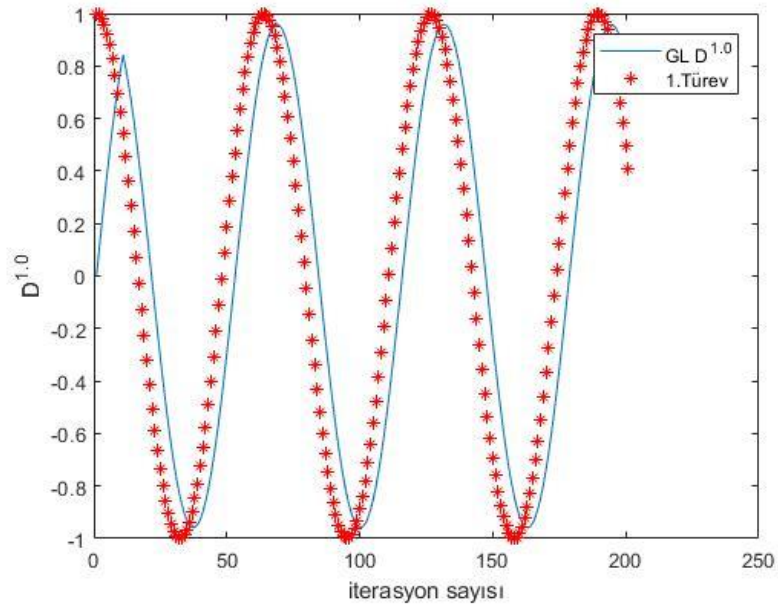


Şekil9. $f(t) = e^t$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ için GL sonucu ile $f'(t) = e^t$ fonksiyonunun sonucu ile karşılaştırılması

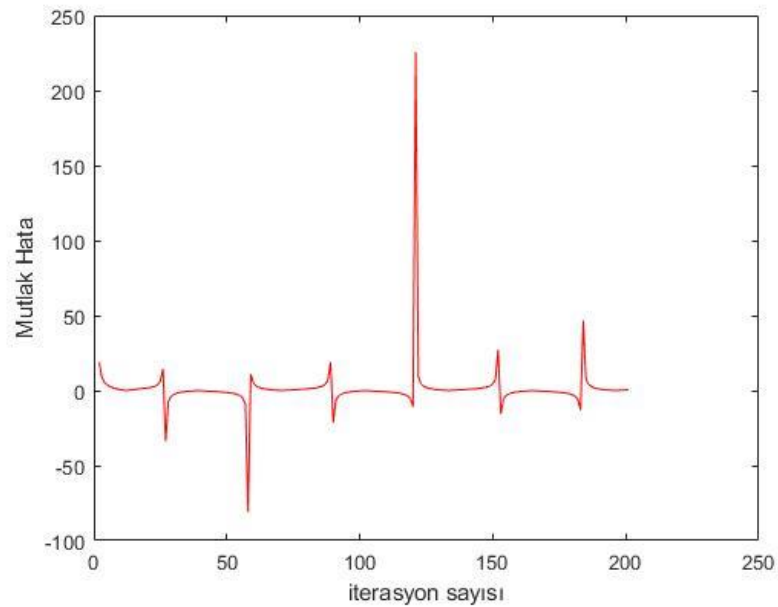


Şekil10. $f(t) = e^t$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ için GL sonucu ile $f'(t) = e^t$ arasında mutlak hata

GL yöntemi kullanılarak $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $f'(t)$ sonucu ile karşılaştırılması Şekil 11'de, mutlak hata fonksiyon sonucu ise Şekil 12'de görsel olarak sunulmuştur.

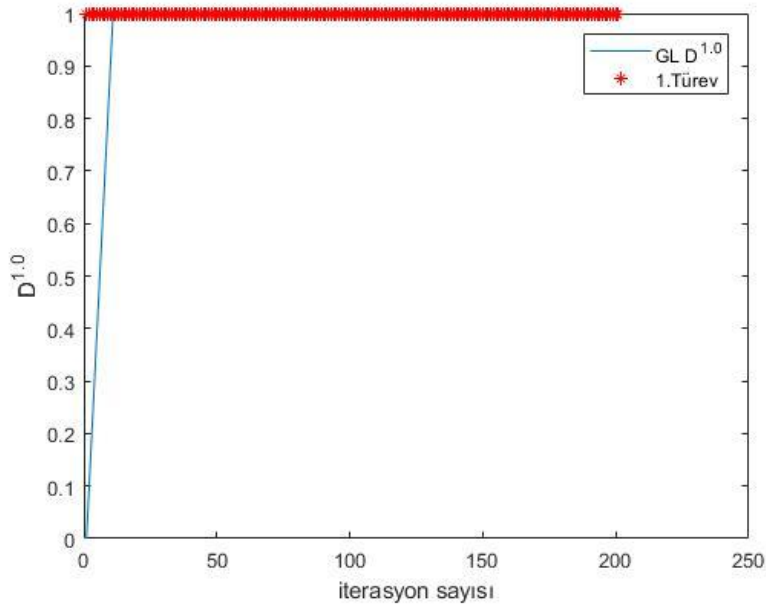


Şekil 11. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $D^{1.0} f(t)$ için GL sonucu ile $f'(t) = \cos(t)$ fonksiyonunun karşılaştırılması

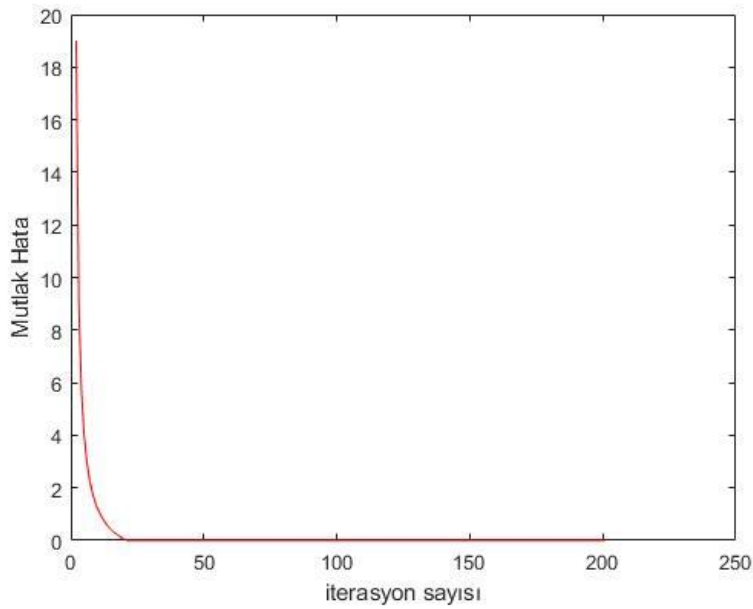


Şekil 12. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $D^{1.0} f(t)$ için GL sonucu ile $f'(t) = \cos(t)$ arasında mutlak hata

GL yöntemi kullanılarak $f(t) = t$ fonksiyonun $f'(t)$ sonucu ile karşılaştırılması Şekil 13'de, mutlak hata fonksiyon sonucu ise Şekil 14'de görsel olarak sunulmuştur.

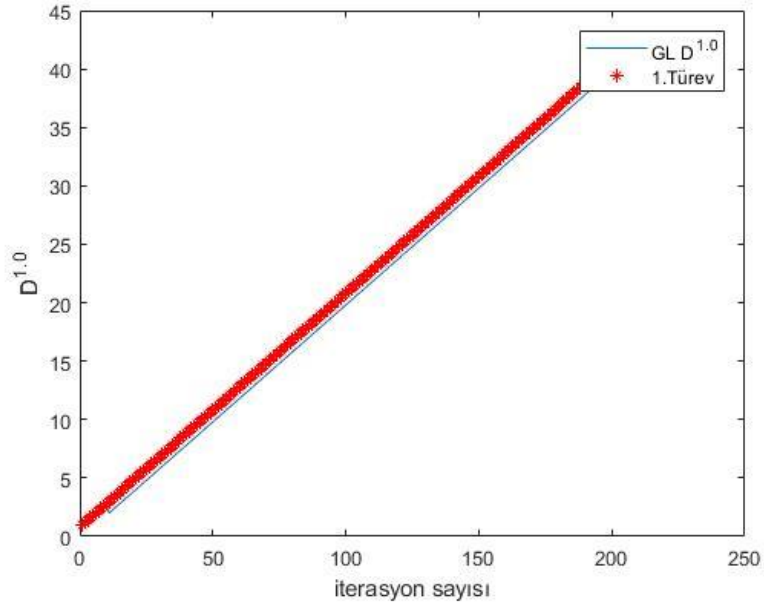


Şekil 13. $f(t) = t$ fonksiyonun $D^{1.0} f(t)$ için GL sonucu ile $f'(t) = 1$ fonksiyonunun karşılaştırılması

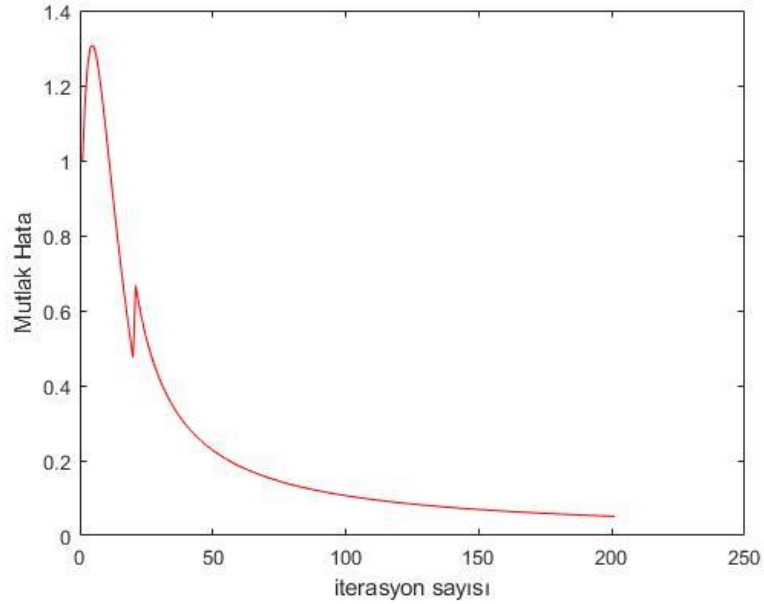


Şekil 14. $f(t) = t$ fonksiyonun $D^{1.0} f(t)$ için GL sonucu ile $f'(t) = 1$ arasında mutlak hata

GL yöntemi kullanılarak $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $f'(t)$ sonucu ile karşılaştırılması Şekil 15'de, mutlak hata fonksiyon sonucu ise Şekil 16'da görsel olarak sunulmuştur.



Şekil 15. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ için GL sonucu ile $f'(t) = 2t + 1$ fonksiyonunun karşılaştırılması



Şekil 16. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ için GL sonucu ile $f'(t) = 2t + 1$ arasında mutlak hata

Tablo 6'da örnekleme periyodunun çözüm doğruluğuna etkisi incelenmiştir. Çözümün örnekleme periyodu t_s azaldıkça yöntemin doğruluğunun arttığı görülmektedir. Tablo 6'da 5 inci saniye için türev değerleri verilmiştir.

Tablo 6.Farklı örnekleme periyotları için (t_s) GL ortalama hata sonuçları

	$t_s=0.1, t:0:20$	$t_s=0.5, t:0:20$	$t_s=1, t:0:20$
$f(t) = e^t$	0.0508	0.2822	0.5529
$f(t) = \sin(t)$	0.0578	3.3335	-0.52798
$f(t) = t$	$4.9738e^{-15}$	0.20008	0.4500
$f(t) = t^2 + t + 1$	0.0118	0.0618	0.0890

Tablo 7. $t = 5$ için farklı kesir derecelerin $f(t)$ fonksiyon değerleri

$t = 5$ için		Fonksiyonlar			
		$f(t) = e^t$	$f(t) = \sin(t)$	$f(t) = t$	$f(t) = t^2 + t + 1$
Kesir Derecesi	$D^{0.5}$	118,0080	-0,6878	2,4609	18,2929
	$D^{0.8}$	102,8322	-0,4086	1,4784	12,8719
	$D^{1.0}$	93,8150	-0,2021	1	10
	$D^{1.2}$	85,5893	0,0073	0,6384	7,6352
	$D^{1.5}$	74,5852	0,3057	0,2734	4,8945

2.3 Laplace'ın Kuvvet Fonksiyonları Türev Genelleştirmesi

Lacroix tarafından 1982'de yazılan eserde aslında Laplace'ın kesir dereceli türevinin basit bir tanımı olduğu yazılmaktadır ve bu çalışmada, $y = t^m$ kuvvet fonksiyonunun türevini ele alarak bir genelleme yapılmaya çalışılmıştır[17]. Bu yöntem, kuvvet seri açılımların bilinen fonksiyonlar için çözümler üretilebilmektedir. $y = t^m$ 'nin n . mertebeye tam sayı derece türevleri için denklem 6'daki eşitlik kullanılmıştır.

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n} \quad (6)$$

Denklem 6'daki eşitlikten yola çıkarak kuvvet fonksiyonunun n . türevi için gamma fonksiyonu denklem 7'deki gibi elde edilmiştir.

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} t^{m-n} \quad (7)$$

m ve n 'nin reel sayı olması durumunda sürekli gamma fonksiyonu ile faktöriyel hesabının mümkün olduğu önerilirse, $y = t^m$ ifadesinin $\alpha \in R$ için kesir dereceli türevi bu genelleme yardımı ile denklem 8'deki gibi ifade edilmektedir.

$$D^\alpha y(x) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} t^{m-\alpha} \quad (8)$$

Birçok temel fonksiyon, kuvvet seri açılımları olarak gösterilebilmektedir. Bu fonksiyonlardan bazılarının kuvvet serisi açılımları aşağıdaki gibidir.

$f(t) = e^t$ kuvvet serisi formunda denklem 9'daki gibi ifade edilmektedir.

$$y = e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \dots \dots \dots \quad (9)$$

Denklem 9'daki formülün kesir dereceli türevi alınırsa denklem10'daki eşitlik elde edilmektedir.

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(e^t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)} + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha+1)} + \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha+1)} \dots \dots \quad (10)$$

Tablo 8. e^t kuvvet serisinin kesir dereceli türev yöntemi

```

alfa=1.0; i=0; N=100;
for t=0:0.01:20
toplamlam=0;
for n=1:N
toplamlam=toplamlam+(1/gamma(n-alfa+1))*t^(n-alfa);
end
i=i+1; y(i)=toplamlam; t1(i)=t;end

```

$f(t) = \sin(t)$ kuvvet serisi formunda denklem 11'deki gibi ifade edilmektedir.

$$y = \sin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \dots \dots (11)$$

Denklem 11'deki formülün kesir dereceli türevi alınırsa denklem 12 ve denklem 13'deki eşitlikler elde edilmektedir.

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(\sin(t)) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{(2k+1)-\alpha}}{\Gamma((2k+1)-\alpha+1)} \quad (12)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{(2k+1)-\alpha}}{\Gamma((2k+1)-\alpha+1)} = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha+1)} - \frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha+1)} + \frac{t^{5-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha+1)} \dots \dots \dots (13)$$

Tablo 9. $\sin(t)$ kuvvet serisinin kesir dereceli türev yöntemi

```

alfa=1.0; i=0; j=0; N=100;
for t=0:0.01:20
toplamlam=0;
for n=1:2:N
j=j+1;
y=(1/gamma(n-alfa+1))*t^(n-alfa);
if mod(j,2)==1
toplamlam=toplamlam + y;
elseif mod(j,2)==0
toplamlam=toplamlam-y;
end
end
i=i+1; dizi(i)=toplamlam;td(i)=t;end

```

Bazı temel kuvvet fonksiyonu ve polinom fonksiyonu için Laplace türev genelleştirme işlemleri ise aşağıdaki gibidir.

$f(t) = \alpha t^n$ kuvvet fonksiyonunun ($\alpha = 1, n = 1$) kesir dereceli türevi denklem 14'deki gibi ifade edilmektedir.

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} t^{m-\alpha} \quad (14)$$

Tablo 10. $f(t) = tkuvvet$ fonksiyonu için kesir dereceli türev yöntemi

```

alfa=1.0;m=1;
for t=0:0.01:20
y=(gamma(m+1)/gamma(m-alfa+1))*t.^(m-alfa);end

```

$f(t) = at^m + bt^n + c$ polinom fonksiyonunun ($a = 1, b = 1, c = 1, m = 2, n = 1$) kesir dereceli türevi denklem 8'deki eşitlik kullanılarak denklem 15'deki gibi ifade edilmektedir.

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} (t^2 + t + 1) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\alpha+1)} t^{2-\alpha} + \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\alpha+1)} t^{1-\alpha} + \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\alpha+1)} t^{0-\alpha} \quad (15)$$

Tablo 11. $t^2 + t + 1$ polinom fonksiyonu için kesir dereceli türev yöntemi

```

alfa=1.0;m1=2;m2=1;m3=0;
for t=0:0.01:20
y=(gamma(m1+1)/gamma(m1-alfa+1))*t.^(m1-alfa);
y1=(gamma(m2+1)/gamma(m2-alfa+1))*t.^(m2-alfa);
y2=(gamma(m3+1)/gamma(m3-alfa+1))*t.^(m3-alfa);
yt=y+y1+y2;
end

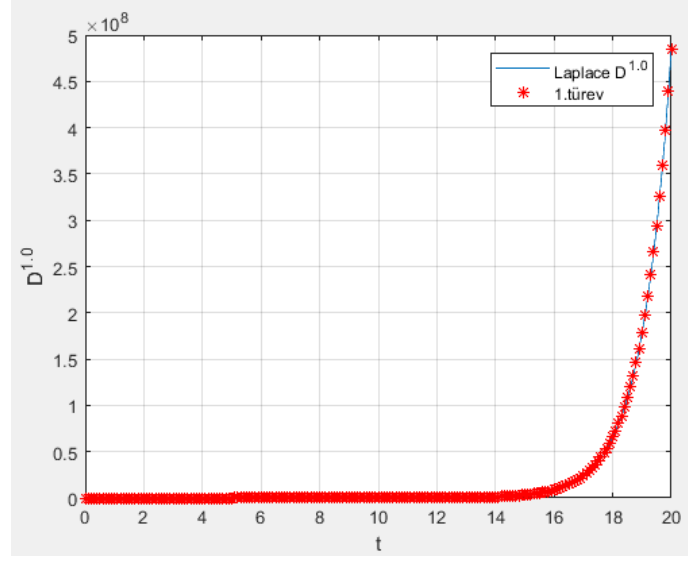
```

Denklem 10, 13, 14 ve 15'de verilen matematiksel ifadelerin Matlab ortamında Tablo 8, 9, 10 ve 11'de sunulan kodlar için $D^{0.5}, D^{0.8}, D^1, D^{1.2}$ ve $D^{1.5}$ kesir dereceleri sırası $f(t)$ fonksiyonlarına uygulanmıştır. $f(t)$ fonksiyonlar ($a, b, c = 1$ olmak koşuluyla) sırası ile şöyledir: $f(t) = e^{at}, f(t) = \sin(at), f(t) = at$ ve $f(t) = at^2 + bt + c$. Tablo 12'de $t = 5$ değeri için beş farklı kesir derecesinin dört farklı fonksiyon üzerinde sonucu sayısal verilerle sunulmuştur.

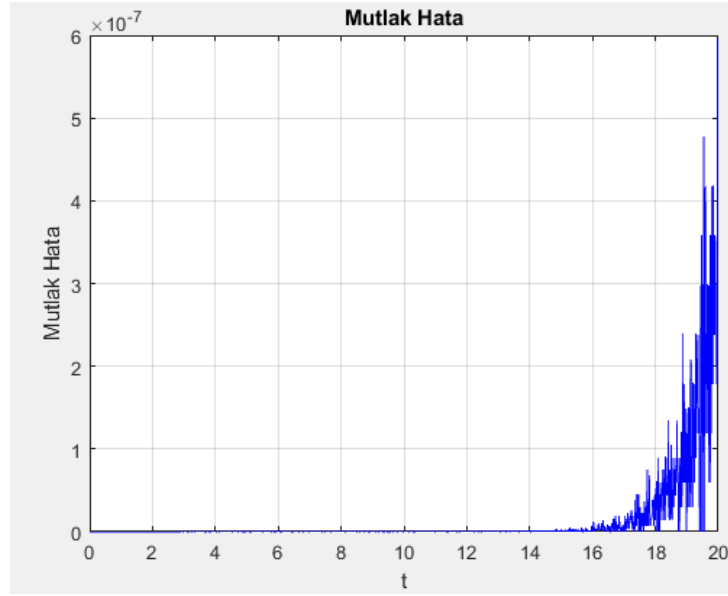
Tablo 12. $t = 5$ için farklı kesir derecelerinde $f(t)$ fonksiyon değerleri

$t = 5$ için		Fonksiyonlar			
		$f(t) = e^t$	$f(t) = \sin(t)$	$f(t) = t$	$f(t) = t^2 + t + 1$
Kesir Derecesi	$D^{0.5}$	148.4331	-0.5001	2.5231	19.5963
	$D^{0.8}$	148.4205	-0.0349	1.5027	14.0853
	$D^{1.0}$	148.4132	0.2837	1	11
	$D^{1.2}$	148.4089	0.5710	0.6225	8.3794
	$D^{1.5}$	148.4079	0.8847	0.2523	5.2733

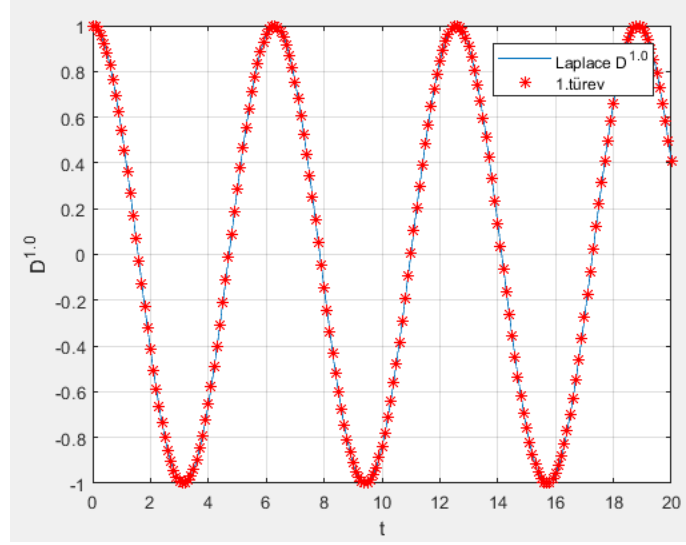
Bu yöntemde, $f(t)$ fonksiyonları üzerinde uygulanan Laplace türev genelleştirme yönteminde, 0-20 aralığında 0.01 artışlara sahip t parametre değeri için Laplace türevleri hesaplanmış ve görsel olarak sunulmuştur. $f(t) = e^t, f(t) = \sin(t), f(t) = t$ ve $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonlarının $D^{1.0}$ için Laplace türev sonuçları ile bu fonksiyonların birinci türevlerinin $f'(t)$ karşılaştırılması ve elde edilen mutlak hata sonuçları elde edilmiştir. $f(t) = e^t$ için karşılaştırma işlemi Şekil 17'de ve mutlak hata Şekil 18'de, $f(t) = \sin(t)$ için karşılaştırma işlemi Şekil 19'da ve mutlak hata Şekil 20'de, $f(t) = t$ için karşılaştırma işlemi Şekil 21'de ve mutlak hata Şekil 22'de, $f(t) = t^2 + t + 1$ için ise karşılaştırma işlemi Şekil 23'de ve mutlak hata Şekil 24'te gösterilmiştir. $f(t) = e^t$ fonksiyonunun birinci türevi $f'(t) = e^t, f(t) = \sin(t)$ fonksiyonunun birinci türevi $f'(t) = \cos(t), f(t) = t$ kuvvet fonksiyonunun birinci türevi $f'(t) = 1$ ve $f(t) = t^2 + t + 1$ polinom fonksiyonunun birinci türevi ise $f'(t) = 2t + 1$ dir.



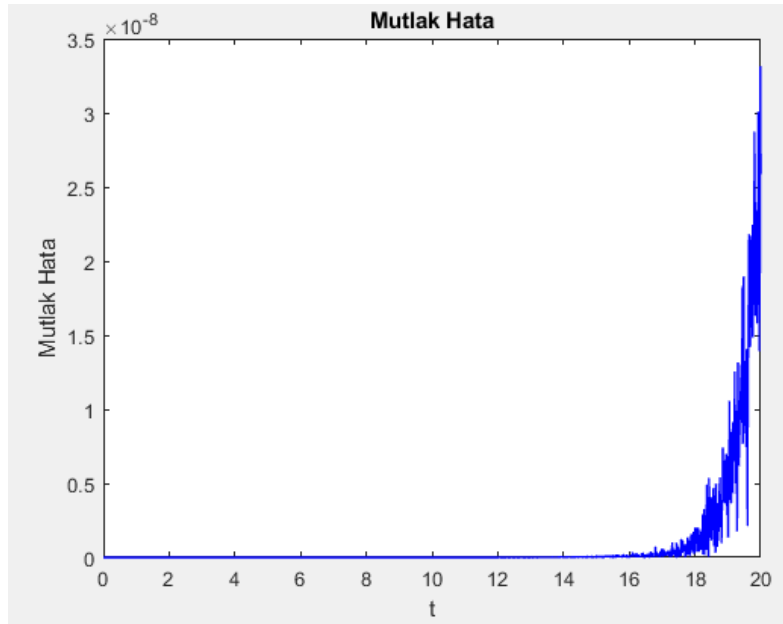
Şekil17. $f(t) = e^t$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ Laplace türev sonucu ile $f'(t) = e^t$ fonksiyonunun karşılaştırılması



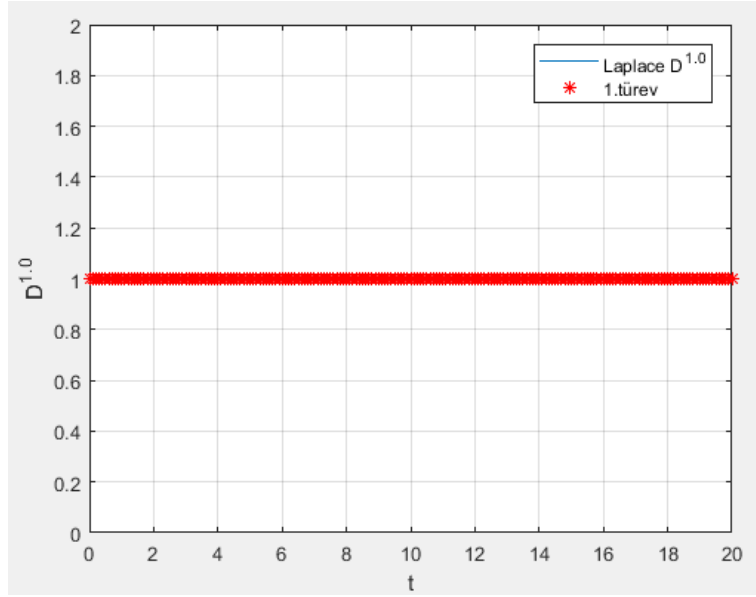
Şekil18. $f(t) = e^t$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ Laplace türev sonucu ile $f'(t) = e^t$ arasında mutlak hata



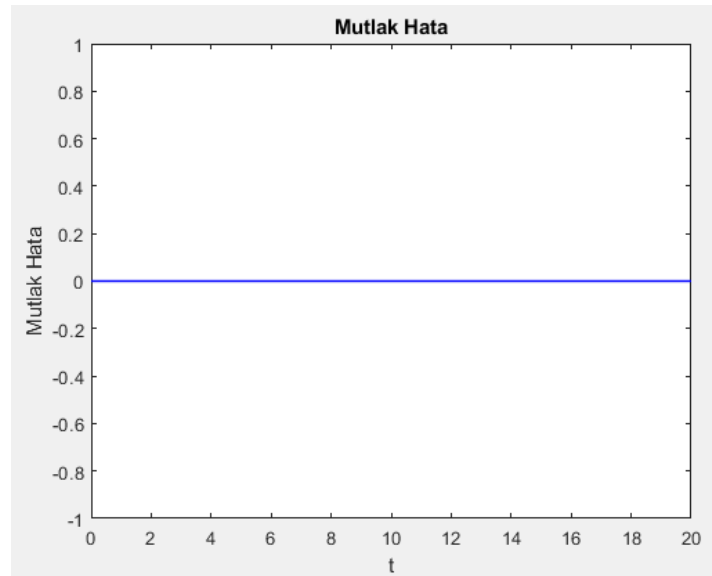
Şekil19. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ Laplacetürev sonucu ile $f'(t) = \cos(t)$ fonksiyonunun karşılaştırılması



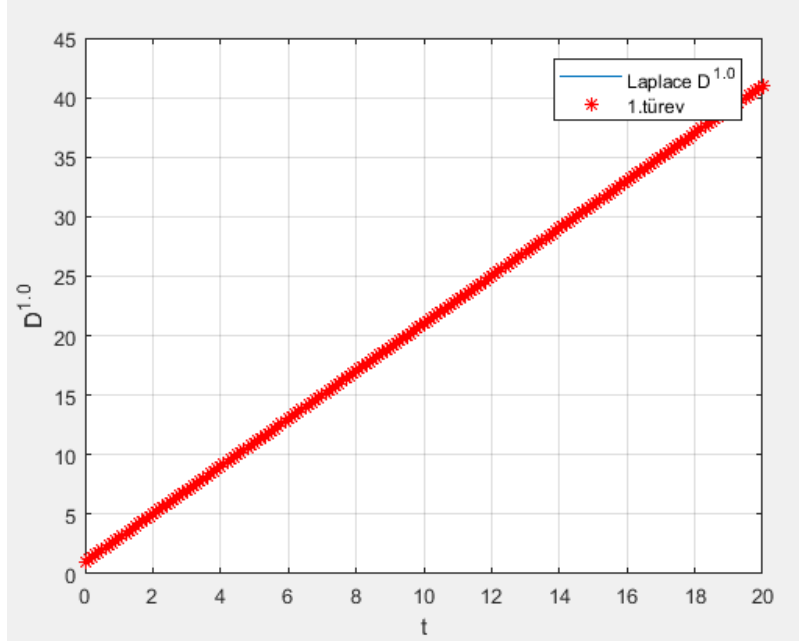
Şekil20. $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ Laplacetürev sonucu ile $f'(t) = \cos(t)$ arasında mutlak hata



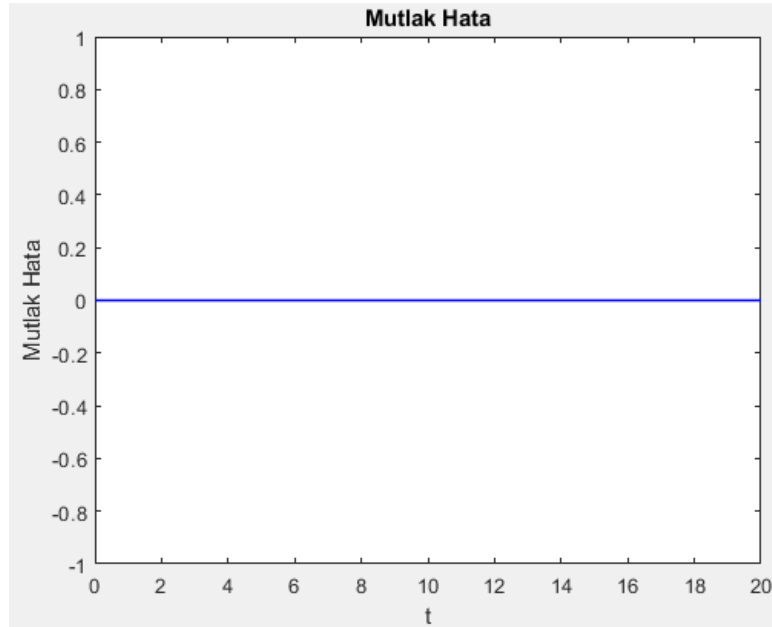
Şekil21. $f(t) = t$ fonksiyonunun $D^{1.0}f(t)$ Laplace türev sonucu ile $f'(t) = 1$ fonksiyonunun karşılaştırılması



Şekil22. $f(t) = t$ fonksiyonunun $D^{1.0}f(t)$ Laplace türev sonucu ile $f'(t) = 1$ arasında mutlak hata



Şekil23. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ Laplace türev sonucu ile $f'(t) = 2t + 1$ fonksiyonunun karşılaştırılması



Şekil24. $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonun $D^{1.0}f(t)$ Laplace sonucu ile $f'(t) = 2t + 1$ arasında mutlak hata

$f(t) = e^t$ ile $f'(t) = e^t$ türev sonucu incelendiğinde her iki sonucunda paralel ölçüde olduğu gözlemlenmiştir. Bu görsel sonuca dayanarak, Laplace türev genelleştirmesi yönteminin $f(t) = e^t$

fonksiyonu üzerinde uygulama sonucu başarılı ve doğru sonuçlar vermektedir. $f(t) = \sin(t)$ ile $f'(t) = \cos(t)$ türev sonuçları incelendiğinde, $t = 0$ noktasında $D^{1.0}$ değeri ile $f'(t) = \cos(t)$ değerleri aynı sonuçları verdiği ve diğer noktalarda da sonuçların paralel ölçüde gittiği gözlemlenmiştir. Laplace türev genelleştirme yönteminin, $f(t) = \sin(t)$ fonksiyonu üzerinde uygulama sonucu başarılı ve doğru sonuçlar elde edilmiştir. Aynı şekilde $f(t) = t$ ile $f'(t) = 1$ ve $f(t) = t^2 + t + 1$ ile $f'(t) = 2t + 1$ için Laplace türev sonucu ile birinci türevlerinin sonuçları incelendiğinde kesin ve doğru sonuçların elde edildiği gözlemlenmiştir. Laplace türev genelleştirme yöntemi bu iki fonksiyon için de başarılı olduğu söylenebilir. Ayrıca, $f(t) = e^t$, $f(t) = \sin(t)$, $f(t) = t$ ve $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonlarının Laplace türev sonuçları ile birinci türevleri incelendiğinde $f(t) = e^t$ ve $f(t) = \sin(t)$ için kuvvet serisi açılımda sonsuz seri açılımına kadar işlemler devam etmektedir. Ancak, hesaplamada bir yerde sonsuz seri açılımını kesmek gerekmektedir. Dolayısı ile kesilen terimler hesaba girmemekte ve bir miktar kesme hatası bırakmaktadır. Bu çalışmada kuvvet serileri için hesaplamamızda 100 terim için işlemler gerçekleştirilmiştir. Bu da $f(t) = e^t$ ile $f(t) = \sin(t)$ için kesme hatalarının oluşmasına neden olmaktadır. Ancak bu kesme hataları ihmal edilecek kadar küçük elde edilmiştir. $f(t) = t$ ve $f(t) = t^2 + t + 1$ fonksiyonları kesin ve doğru sonuçlar verdiği için herhangi bir hata oluşmamaktadır.

5. Sonuçlar

Tablo 13'de üç farklı türev tanımı ile hesaplanan ortalama mutlak hata değerleri karşılaştırılmıştır. Laplace kuvvet fonksiyonu türev genellemesi ile yapılan hesaplamalar kuvvet fonksiyonu ve polinomlar için kesin doğru sonuç veriyor. Ancak, kuvvet serisi açılımı ile ifade edilebilen fonksiyonlar için sonlu seri hesaplamasından dolayı kesme hatası gelmiştir. Tablodaki görülen mutlak hata değerleri kuvvet serisinin 100 terimi için elde edilmiştir. GL tanımı ile yapılan hesaplamalarda örnekleme periyodu büyüdükçe hatalar artmaktadır. Tablodaki GL yöntemi performans değerleri örnekleme periyodu 0.01 için elde edilmiştir. Dolayısı ile GL tanımı ile yapılan hesaplamalarda örnekleme periyodunun yeterince küçük seçilmesi gerekmektedir. Caputo tanımı Matlab nümerik integral hesaplama fonksiyonları ile hesaplanmıştır ve nümerik hesaplama hataları sonuçlara yansımıştır.

Tablo 13. Birinci derece türev sonuçlarına göre mutlak hataların karşılaştırılması

	$f(t) = e^t$	$f(t) = \sin(t)$	$f(t) = t$	$f(t) = t^2 + t + 1$
Caputo Tanımı	$4.2069e^{-19}$	$4.2222e^{-16}$	0	$1.5635e^{-15}$
GL Tanımı	0,0508	0,0578	$4.9738e^{-15}$	0,0118
Laplace kuvvet fonksiyonu türev genellemesi ile	$1.3891e^{-08}$	$8.4793e^{-10}$	0	0

Teşekkür

Bu çalışma İnönü Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği, Kesir Dereli Sistemler doktora dersi kapsamında yapılan proje çalışması sonuçlarından derlenmiştir. Ders kapsamında desteğini esirgemeyen Dr. Barış Baykant Alagöz'e teşekkür ederiz.

Kaynakça

- [1]. Yusuf Sökmen (2012), Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi Ve Uygulamaları, Ahi Evran Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, Kırşehir
- [2]. Sean Townsend, (2015), Numerical Methods in Fractional Calculus, California State Polytechnic University, Pomona, Master Thesis
- [3]. Ali Karıcı, (2015), Kesir Dereceli Türevin Yeni Yaklaşımının Özellikleri, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 30(3):487-501
- [4]. Ahmet Kareem (2012), Fractional Caputo-Fabrizio Derivative With Applications, Çankaya Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, Ankara
- [5]. World Scientific Book (2014), ws-cacsd-eng, <https://mechatronics.ucmerced.edu/sites/mechatronics.ucmerced.edu/files/page/documents/ws-cacsd-eng-chapter11.pdf>, Accessed 27 November 2018
- [6]. George A. Anastassiou, (2009), Riemann-Liouville And Caputo Fractional Approximation Of Csiszar's F Divergence, *Sarajevo Journal Of Mathematics*, 5(17):3-12
- [7]. Özkan B., Ekinci M., Gökdoğan A. "Grunwald-Letnikov Kesir Mertebeli Diferansiyel Maskesi Kullanarak Düşük Çözünürlüklü Avuçiçi Görüntülerinin İyileştirilmesi", Eleco 2014 Elektrik – Elektronik – Bilgisayar ve Biyomedikal Mühendisliği Sempozyumu, 27 – 29 Kasım 2014, Bursa.
- [8]. Oldham K. B., Spanier J., 1974, *The Fractional Calculus*, New York and London, Academic Press.
- [9]. Podlubny I., 1999, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, New York and Tokyo, Academic Press, 198.
- [10]. Tarasov, V. E. (2016). Three-dimensional lattice models with long-range interactions of Grünwald–Letnikov type for fractional generalization of gradient elasticity. *Meccanica*, 51(1), 125-138.
- [11]. Tolba, M. F., AbdelAty, A. M., Said, L. A., Elwakil, A. S., Azar, A. T., Madian, A. H. & Radwan, A. G. (2017, May). FPGA realization of Caputo and Grünwald-Letnikov operators. *In Modern Circuits and Systems Technologies (MOCAST), 2017 6th International Conference on* (pp. 1-4). IEEE.
- [12]. Obembe, A. D., Abu-Khamsin, S. A., Hossain, M. E., & Mustapha, K. (2018). Analysis of subdiffusion in disordered and fractured media using a Grünwald-Letnikov fractional calculus model. *Computational Geosciences*, 1-20.
- [13]. Wang, J., Ye, Y., & Gao, X. (2015). Fractional 90 phase-shift filtering based on the double-sided Grünwald–Letnikov differintegrator. *IET Signal Processing*, 9(4), 328-334.
- [14]. Harker, M., & O'Leary, P. (2017). Trapezoidal rule and its error analysis for the Grünwald-Letnikov operator. *International Journal of Dynamics and Control*, 5(1), 18-29.
- [15]. Jalalinejad, H., Tavakoli, A., & Zarmehi, F. (2018). A simple and flexible modification of Grünwald–Letnikov fractional derivative in image processing. *Mathematical Sciences*, 12(3), 205-210.
- [16]. John, R., & Kunju, N. (2018, April). Optimization of Grünwald-Letnikov's (GL) based Fractional Filter Used for Image Enhancement. *In 2018 Second International Conference on Inventive Communication and Computational Technologies (ICICCT)* (pp. 612-614). IEEE.
- [17]. Shantanu Das, *Functional Fractional Calculus*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2011